Παράδειγμα

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}$

ν.δ.ο. (a_n) κάτω φρ. από το 2 Bernoulli

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2$

$\boxed{\text{Ανισότητα Bernoulli} \quad (1-a)^n \geq 1 + na}$

Παράδειγμα

$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \ , n \in \mathbb{N}$

Ν.δ.ο. a_n είναι φραγμένη

Έχω $a_n > 0$ Άρα η a_n είναι κάτω φραγμένη

Θ.δ.ο. $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (*)

θα δουλέψουμε με επαγωγή

(*) ισχύει για $n=1$

Για $n=1$ έχω $a_1 = \sqrt{2} < 2$

Έστω ότι (*) ισχύει για $n=k$

δηλαδή $a_k < 2$

θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$.

$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$

(*) ισχύει για $n=k+1$

Άρα ισχύει για κάθε n

Μαθηματική Επαγωγή

No. Date

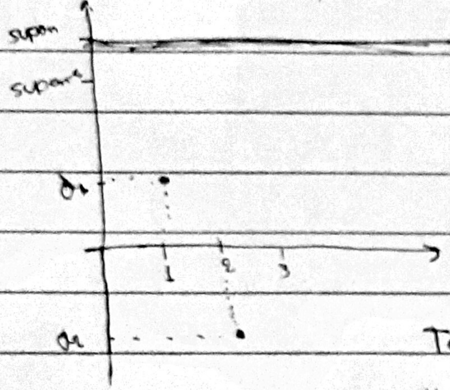
Supremum και Infimum ακολουθίας

Έστω (a_n) ακολουθία άνω φραγμένη

Αξίωμα: Από όλα τα άνω φράγματα της (a_n) υπάρχει ένα που είναι το μικρότερο.
Αυτό λέγεται supremum της a_n, και γράφεται $\sup a_n$

Ιδιότητες του supremum

- Αν M είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα της (a_n), τότε $\sup a_n \geq M$.
είναι προφανές από τον ορισμό.
- Για κάθε $\varepsilon>0$, $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $a_{n_0} \geq \sup a_n - \varepsilon$



Απόδειξη (με άτοπο)

Έστω ότι δεν ισχύει
Τότε $\exists\, \varepsilon_0$ τ.ω. $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n < \sup a_n - \varepsilon_0$
Από την σχέση βρίσκουμε ότι
Το $\sup a_n - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα της a_n
και μικρότερο του $\sup a_n$ το οποίο
δεν γίνεται γιατί $\sup a_n$ είναι το μικρότερο
άνω φράγμα άρα άτοπο.

Για το infimum: Έστω (a_n) κάτω φραγμένη, η $(-a_n)$ είναι άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists\ \sup(-a_n)$

Ορισμός: $\inf a_n = \sup(-a_n)$

Μονότονες Ακολουθίες

Έστω (a_n) μια ακολουθία

(i) Η (a_n) λέγεται αύξουσα αν $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$
$(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots)$

Προφανώς κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από το a_1.

(ii) Η (a_n) λέγεται γνησίως αύξουσα αν $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Η (a_n) λέγεται φθίνουσα αν $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$(a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots)$

(iv) Η (a_n) λέγεται γν. φθίνουσα αν $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$(a_1 > a_2 > a_3 \dots)$

(v) Οι γνησίως αύξουσες και οι γνησίως φθίνουσες ακολουθίες λέγονται γνησίως μονότονες ακολουθίες

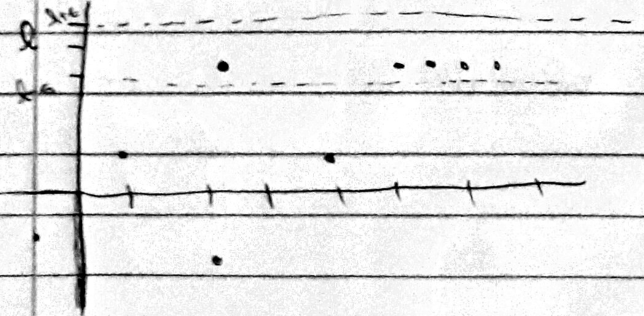
(vi) Οι αύξουσες και οι φθίνουσες λέγονται απλώς μονότονες

Σύγκλιση - Ακολουθία

1) Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$ ή $\lim a_n = l$.
ή $a_n \to l$, $n \to +\infty$

Εάν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.
(n_0 γενικά εξαρτάται από το $\varepsilon > 0$, δηλ. $n_0 = n_0(\varepsilon)$)

Γεωμετρική αναπαράσταση σύγκλισης $a_n \to l$.



Πρόταση: Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε είναι μοναδικό.

Απόδειξη (Με άτοπο)

Έστω ότι η ακολουθία έχει διαφορετικά όρια.
Τότε θα υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \to l$ $n \to +\infty$ με $l \neq m$.
$a_n \to m$ $n \to +\infty$

Δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει σε δύο διαφορετικά μέρη

το οποίο είναι άτοπο.
Άρα το όριο είναι μοναδικό.

[δηλαδή, επιλέγω $\epsilon = \frac{|l-m|}{3} > 0$

$\lim a_n = l \Rightarrow \exists n_1 : |a_n - l| < \epsilon = \frac{|l-m|}{3}, \forall n \geq n_1$

$\lim a_n = m \Rightarrow \exists n_2 : |a_n - m| < \epsilon = \frac{|l-m|}{3}, \forall n \geq n_2$

Θέτω $n_0 = \max(n_1, n_2)$

Τότε αν $n \geq n_0$, οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ταυτόχρονα

$|a_n - l| + |a_n - m| < \frac{2|l-m|}{3}$

$|a_n - l - a_n + m| \leq |a_n - l| + |a_n - m| < \frac{2}{3}|l-m|$

$|l-m| < \frac{2}{3}|l-m|$ Άρα άτοπο]

$1 < \frac{2}{3}$ Άρα $m = l$.

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη

Απόδειξη

Έστω $a_n \to l \in \mathbb{R}$

Θεωρώ $\epsilon = 1$ στον ορισμό του ορίου

$\exists n_0 : |a_n - l| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

$||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

$|a_n| \leq |l| + 1 \quad n \geq n_0$

Θέτω $\theta = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |l|+1\}$

$|a_n| \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• Το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει.
Δηλαδή, ∃ φραγμένη ακολουθία που δεν συγκλίνει
π.χ. $a_n=(-1)^n$ $n\in\mathbb{N}$
Φανερά η (a_n) είναι φραγμένη, αφού $|a_n|=1$.

Απόδειξη (Με άτοπο)

Θ.Δ.Ο. η (a_n) δε συγκλίνει με άτοπο
Έστω ότι συγκλίνει δηλαδή $a_n\to l\in\mathbb{R}$ $n\to+\infty$
Για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ στον ορισμό του ορίου: ∃ n_0 τ.ω. $|a_n-l|<\frac{1}{2}$ $n\ge n_0$

$$|(-1)^n-l|<\frac{1}{2} \quad n\ge n_0$$

Για $n\ge n_0$ άρτιο έχω: $|1-l|<1/2$
Για $n\ge n_0$ περιττό έχω: $|-1-l|<1/2$.

Προσθέτω κατά μέλη: $|1-\cancel{l}+1+\cancel{l}|\le|1-l|+|-1-l|<1$
$2\le|1-l|+|-1-l|<1$
άτοπο

• Πρόταση: Αν $\lim a_n=l$ τότε $\lim|a_n|=|l|$. Το αντίστροφο δεν ισχύει εκτός εάν $l=0$.

Απόδειξη

Γνωρίζω $a_n\to l$
Έστω $\varepsilon>0$, ∃ n_0: $|a_n-l|<\varepsilon$, $n\ge n_0$
$||a_n|-|l||<\varepsilon$, $n\ge n_0$
$\Rightarrow \lim|a_n|=|l|$

- Για να δείξω ότι το αντίστροφο δεν ισχύει θεωρώ $a_n=(-1)^n$
$|a_n|=1\to1$ $n\to+\infty$
Η a_n δεν συγκλίνει

No. Date

Αν όμως $\lim|a_n|=0$

θ.δ.ο. $\lim a_n=0$.

$\forall \epsilon>0,\ \exists n_0: \big||a_n|-0\big|<\epsilon \quad , n\geq n_0.$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{|a_n|}<\epsilon \quad , n\geq n_0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{|a_n-0|}$

Ορισμός: Αν μια ακολουθία έχει όριο το 0, τότε θα λέγεται μηδενική.

Παρατήρηση: Αν $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_n-\ell)$ είναι μηδενική

Απόδειξη

$a_n \to \ell$

$\forall \epsilon>0,\ \exists n_0: |a_n-\ell|<\epsilon \quad n\geq n_0$

θέτω $b_n=a_n-\ell$.

$\forall \epsilon>0,\ \exists n_0: |b_n-0|<\epsilon \quad n\geq n_0$

$\Rightarrow \lim b_n=0$